# TD 5

## 1

Prouver la forme close pour les fonctions génératrices suivantes :

| | suite | fonction génératrice | forme close |
|---|---|---|---|
| 1 | $0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ | $\sum_{n\geq 0} nz^n$ | $\frac{z}{(1-z)^2}$ |
| 2 | $1, 2, 3, 4, \ldots, (n+1)\ldots$ | $\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ | $\frac{1}{(1-z)^2}$ |
| 3 | $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ | $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$ | $\frac{1}{(1-2z)}$ |
| 4 | $1, c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$ | $\sum_{n\geq 0} c^n z^n$ | $\frac{1}{(1-cz)}$ |
| 5 | $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ | $\sum_{n>0} \frac{1}{n} z^n$ | $\ln \frac{1}{1-z}$ |
| 6 | $0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, C_n^2, \ldots$ | $\sum_{n\geq 2} C_n^2 z^n$ | $\frac{z^2}{(1-z)^3}$ |

## 2 Manœuvres de base

(i) Les fonctions génératrices permettent de résoudre des relations de récurrences. Etant donnée une suite $a_n$ qui satisfait une certaine récurrence nous cherchons une forme close pour $a_n$ en fonction de $n$; il faut procéder en quatre étape :

1. Ecrire une relation qui exprime $a_n$ en fonction d'autres éléments de la suite,
2. Multiplier les deux membres de l'équation par $z^n$ et sommer sur tout $n$. Ceci donne, dans le membre gauche la somme $\sum_n a_n z^n$, donc la fonction génératrice $F(z)$. Le membre droit doit être réorganisé de façon à devenir une expression en fonction de $F(z)$,
3. Résoudre la nouvelle équation pour obtenir une forme close de $F(z)$, on suppose que $a_n = 0$ pour $n < 0$,
4. Développer $F(z)$ en série et prendre le coefficient de $z^n$. C'est la forme close de $a_n$ que nous cherchons.

(ii) Soit la suite $\{s_n\}_{n\geq 0}$ donnée par (1) $s_0 = 0$, (2) $s_n = s_{n-1}+1$ pour $n \geq 1$. Déduire la fonction génératrice de $s_n$ et une expression close de $s_n$.
(iii) La complexité d'un programme (le nombre de calculs élémentaires, ...) est donnée par : (1) $a_0 = 1$, (2) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$ (les tours de Hanoï par exemple). Déduire la fonction génératrice de $a_n$ et une expression close de $a_n$.

## 3

Utiliser la méthode (i) pour trouver une forme close pour :

1

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

$$\left( f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \right)$$

2

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 5a_{n-1} - 6a_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

3

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ c_{n-1} - c_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$