LISP – Maîtrise d'Informatique

1. Il s'agit de calculer x^n pour n entier positif. Une méthode est la suivante :

$$expo(x,n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 0, \\ (expo(x, n/2))^2 & si\ n\ est\ paire, \\ x \times expo(x, n-1) & autrement. \end{cases}$$

Écrivez une fonction qui effectue ce calcul.

2. Soit $\mathcal{F}_n$ la liste de toutes les chaînes binaires qui ne contient pas deux *1* qui se suivent, ordonnée de telle façon que deux chaînes successives dans la liste diffèrent sur une seule position; par exemple, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$ sont données dans le tableau suivant.

$\mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_3$	$\mathcal{F}_4$
	0 1 0	**0** 1 0 0
	0 0 0	**0** 1 0 1
	0 0 1	**0** 0 0 1
	1 0 1	**0** 0 0 0
	1 0 0	**0** 0 1 0
0 1		**1 0** 1 0
0 0		**1 0** 0 0
1 0		**1 0** 0 1

$\mathcal{F}_n$ est définie recursivement par la relation suivante :

$$\mathcal{F}_n = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad n = 0, \\ \{0,1\} & \text{si} \quad n = 1, \\ \mathbf{0}\overline{\mathcal{F}}_{n-1} \cup \mathbf{10}\overline{\mathcal{F}}_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

où $\overline{\mathcal{F}}_n$ est l'image miroir de la liste $\mathcal{F}_n$. En d'autres mots $\mathcal{F}_0$ est la liste vide, $\mathcal{F}_1$ est la liste formée de deux chaînes de longueur 1: *0* et *1* respectivement, et généralement $\mathcal{F}_n$ est obtenue par l'union de l'image miroir de la liste $\mathcal{F}_{n-1}$ après que l'on a ajouté *0* à chaque chaîne et de l'image miroir de la liste $\mathcal{F}_{n-2}$ après que l'on a ajouté *10* à chaque chaîne.

Ecrire la définition de la fonction *generer* qui prend un entier n en argument et retourne la liste $\mathcal{F}_n$.

3. Un nombre parfait est caractérisé par le fait qu'il est égal à la somme de tous ses diviseurs (sauf lui même). Exemple : 6=1+2+3.

- Écrivez une fonction qui teste si un entier donné en argument est parfait;
- Écrivez une fonction qui renvoie la liste de tous les nombres parfaits plus petits qu'un nombre donné.