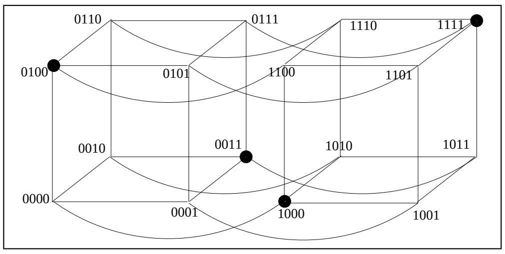
TD Codes correcteurs d'erreurs

Exo 1 Soit le code correcteur d'erreurs donné par : $a \mapsto 0100$, $b \mapsto 0011$, $c \mapsto 1000$, et $d \mapsto 1111$. (i) Décoder *au plus proche voisin* : 0111, 0110, 0011. (ii) Donner : la distance minimale et le taux d'information. (iii) Combien d'erreurs ce code détecte/corrige-t-il ? (iv) Peut-on améliorer ce code tout en gardant sa longueur pour qu'il corrige une erreur ?



Exo 2 Le code : (i) avec bit de parité, et (ii) le code de deux répétitions d'une 'plage de trois', est-il un code linéaire ?
Donner pour les deux codes : les mots du code, la matrice génératrice, la dimension du code, la distance minimale, les paramètres, le taux d'information ; combien corrige-t-il d'erreurs ?

Exo 3 Soit la matrice génératrice $G = \begin{pmatrix} 100011 \\ 010101 \\ 001110 \end{pmatrix}$ d'un code linéaire.

1. Quels sont les mots du code ?
2. Quelle est la dimension du code ?
3. Quelle est sa distance minimale?
4. Quels sont les paramètres de ce code ?
5. Quel est son taux d'information ?
6. Combien corrige-t-il d'erreurs ?
7. Comparer ce code avec celui de l'exo 2 point (ii),
8. Vérifier la proposition de Hamming pour ce code.

Exo 4 Soit le code où la suite binaire $a_1a_2a_3a_4$ est codée par $a_1a_2a_3a_4\,c_1c_2c_3$, et les 'bits de parité' c_1, c_2, c_3 sont donnés par :

$$c_1 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{est pair,} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_1 + a_2 + a_4 \quad \text{est pair,} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$c_3 = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_2 + a_3 + a_4 \quad \text{est pair,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner la matrice génératrice de ce code et répondre aux questions 1–8 de l'exo 3.
Exo 5 Pour le code linéaire définie en exo. 3 :

1. Donner le tableau standard et les classes latérales,
2. Décoder 111011 et 110011.

Exo 6 Si $G = (Id_k \ P)$ est une matrice génératrice sous forme normale d'un code C, on en déduit une matrice génératrice H du code dual C^d appelée aussi matrice de contrôle par: $H = (P^t \ Id_{n-k})$ où P^t dénote la transposée de la matrice P. Montrer que la matrice de contrôle du code engendré par la matrice génératrice $G = \begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix}$ est la matrice génératrice du code de répétition de longueur 3.

TD Codes correcteurs d'erreurs : décodage efficace

Exo 7 Soit la matrice génératrice $G = \begin{pmatrix} 100011 \\ 010101 \\ 001110 \end{pmatrix}$ d'un code linéaire.

1. Calculer la matrice de contrôle H.
2. Calculer le syndrome des chefs de classes.
3. Décoder 111011 et 110011.

Exo 8

1. Donner la matrice de contrôle de $Ham(3)$, pour laquelle les colonnes sont ordonnées selon l'ordre naturel.
2. Soit $y = 1101011$. Calculer $S(y)$, le syndrome de y, et decoder y.
3. Construire une matrice génératrice qui correspond à la matrice de contrôle de $Ham(3)$.

Exo 9 Le code de Hamming étendu noté $\overline{Ham(r)}$ est obtenu à partir du code de Hamming $Ham(r)$ en lui ajoutant un test de parité. La distance minimale de ce code linéaire passe alors de 3 à 4. Ainsi, les paramètres de $\overline{Ham(r)}$ sont $(2^r, 2^r - r, 4)$. En fait, ce code n'est pas plus efficace que $Ham(r)$ pour le décodage. En effet, on a ajouté un bit de plus à transmettre à chaque mot du code. Cependant, puisque ce code a une distance minimale de 4, il permet de corriger une erreur et d'en détecter deux.

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 00011110 \\ 01100110 \\ 10101010 \\ 11111111 \end{pmatrix}$$

L'algorithme de décodage est : Pour un message reçu y on calcule le syndrome $S(y) = (s_1 s_2 s_3 s_4)$

- si $s_4 = 0$ et $(s_1 s_2 s_3) = (0, 0, 0)$ alors on suppose qu'il n'y a pas eu d'erreur ;
- si $s_4 = 0$ et $(s_1 s_2 s_3) \neq (0, 0, 0)$ alors on suppose qu'il y a eu deux erreurs ;
- si $s_4 = 1$ et $(s_1 s_2 s_3) = (0, 0, 0)$ alors on suppose qu'il y a eu une erreur en dernière position ;
- si $s_4 = 1$ et $(s_1 s_2 s_3) \neq (0, 0, 0)$ alors on suppose qu'il y a eu une erreur en position j, où j est le nombre representé en binaire $(s_1 s_2 s_3)$.

Avec cet algorithme décoder : $y = 00000000$, $y = 10000010$, $y = 10100010$ et $y = 11111111$.