TD 3 – 4

1

Soit 2 billes rouges, 3 vertes, et 4 jaunes. Il s'agit de ranger les billes sur une ligne. 1) De combien de façons différentes un daltonien qui confond le rouge et le vert range les billes? 2) De combien de façons différentes un daltonien qui confond le jaune et le vert range les billes? 3) De combien de façons differentes une personne « normale » range les billes?

2 Compter les fonctions

Soit $\mathcal{F}(n,x)$ l'ensemble des fonctions

$$f : \{1,2,\ldots n\} \to \{1,2,\ldots x\}$$

Une fonction $f \in \mathcal{F}(n,x)$ est :

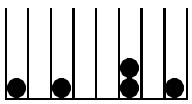
- *injective* : si $a \neq b \in \{1,2,\ldots n\}$ alors $f(a) \neq f(b)$;
- *surjective* : si $\forall z \in \{1,2,\ldots x\}$ alors $\exists a \in \{1,2,\ldots n\}$ tel que $f(a) = z$;
- *bijective* : si f est simultanement injective et surjective.

Trouver une représentation linéaire et compter

1. $\mathcal{F}(n,x)$;
2. $\{f \in \mathcal{F}(n,x),\ f\ bijective\}$;
3. $\{f \in \mathcal{F}(n,x),\ f\ injective\}$;
4. $\{f \in \mathcal{F}(n,x),\ f\ surjective\}$.

3 Compositions

Une *composition* d'un entier n en k parties est une suite d'entiers non-négatifs de longueur k, $p_1 p_2 \ldots p_k$, tel que $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$. Par exemple 1 0 1 0 0 2 0 1 est une composition de 5 en 8 parties parce que $1+0+1+0+0+2+0+1=5$.
Alternativement, une composition de n en k parties peut-être vue comme le rangement de n billes *non-étiquetées*[1] en k boîtes étiquetées[2] . Ci-dessous, la composition 1 0 1 0 0 2 0 1 de 5 en 8 parties dans la représentation « *n billes en k boîtes* ». Par la suite $Comp(n,k)$ est l'ensemble des compositions de n en k parties.



1. Trouver une bijection entre $Comp(n,k)$ et un ensemble d'objets combinatoires connu (voir le tableau);

1. indifférentiables
2. différentiables

2. Déduire $card(Comp(n,k))$;

3. Trouver une définition récursive pour $Comp(n,k)$;

4. Exprimer cette définition en un algorithme de génération exhaustive pour $Comp(n,k)$.

TAB. 1 – *Les composition de 3 en 3 parties et les combinaisons de 2 parmi 5.*

$Comp(3,3)$				$C(5,2)$						
	0	0	3	1	2	●	●	○	○	○
	0	1	2	1	3	●	○	●	○	○
	0	2	1	1	4	●	○	○	●	○
	0	3	0	1	5	●	○	○	○	●
	1	0	2	2	3	○	●	●	○	○
	1	1	1	2	4	○	●	○	●	○
	1	2	0	2	5	○	●	○	○	●
	2	0	1	3	4	○	○	●	●	○
	2	1	0	3	5	○	○	●	○	●
	3	0	0	4	5	○	○	○	●	●

4 Encore Fibonacci

Ecrire un algorithme de génération aléatoire pour l'ensemble de séquences de Fibonacci F_n, sachant que (a) $\frac{f_{n+1}}{f_n} \simeq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5 Code de Gray pour les combinaisons

Soit $C_{n,m} \subset \{0,1\}^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m. Un Code de Gray pour $C_{n,m}$ est défini par :

$$\mathcal{C}_{n,m} = \begin{cases} 00\ldots0 & \text{si} \quad m = 0 \\ 11\ldots1 & \text{si} \quad n = m \\ 0\mathcal{C}_{n-1,m} \cup 1\overline{\mathcal{C}}_{n-1,m-1} & \text{si} \quad 1 < m < n. \end{cases} \tag{1}$$

Écrire un algorithme pour générer ce code de Gray.