TD 3 – 4

1

Soit 2 billes rouges, 3 vertes, et 4 jaunes. Il s'agit de ranger les billes sur une ligne. 1) De combien de façons différentes un daltonien qui confond le rouge et le vert range les billes ? 2) De combien de façons différentes un daltonien qui confond le jaune et le vert range les billes ? 3) De combien de façons differentes une personne « normale » range les billes ?

2 Compter les fonctions

Soit $\mathcal{F}(n, x)$ l'ensemble des fonctions

$$f : \{1, 2, \ldots n\} \to \{1, 2, \ldots x\}$$

Une fonction $f \in \mathcal{F}(n, x)$ est :

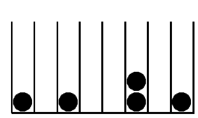
- *injective*: si $a \neq b \in \{1, 2, \ldots n\}$ alors $f(a) \neq f(b)$;
- *surjective*: si $\forall z \in \{1, 2, \ldots x\}$ alors $\exists a \in \{1, 2, \ldots n\}$ tel que $f(a) = z$;
- *bijective*: si f est simultanement injective et surjective.

Trouver une représentation linéaire et compter

1. $\mathcal{F}(n, x)$;
2. $\{f \in \mathcal{F}(n, x),\ f \textit{ bijective}\}$;
3. $\{f \in \mathcal{F}(n, x),\ f \textit{ injective}\}$;
4. $\{f \in \mathcal{F}(n, x),\ f \textit{ surjective}\}$.

3 Compositions

Une *composition* d'un entier n en k parties est une suite d'entiers non-négatifs de longueur k, $p_1 p_2 \ldots p_k$, tel que $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$. Par exemple 1 0 1 0 0 2 0 1 est une composition de 5 en 8 parties parce que $1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 + 0 + 1 = 5$.
Alternativement, une composition de n en k parties peut-être vue comme le rangement de n billes *non-étiquetées*[1] en k boîtes étiquetées[2] . Ci-dessous, la composition 1 0 1 0 0 2 0 1 de 5 en 8 parties dans la représentation « *n billes en k boîtes* ». Par la suite $Comp(n, k)$ est l'ensemble des compositions de n en k parties.



1. Trouver une bijection entre $Comp(n, k)$ et un ensemble d'objets combinatoires connu (voir le tableau);

1. indifférentiables
2. différentiables

2. Déduire $card(Comp(n,k))$;
3. Trouver une définition récursive pour $Comp(n,k)$;
4. Exprimer cette définition en un algorithme de génération exhaustive pour $Comp(n,k)$.

TAB. 1 – *Les composition de 3 en 3 parties et les combinaisons de 2 parmi 5.*

$Comp(3,3)$				$C(5,2)$						
	0	0	3	1	2	●	●	○	○	○
	0	1	2	1	3	●	○	●	○	○
	0	2	1	1	4	●	○	○	●	○
	0	3	0	1	5	●	○	○	○	●
	1	0	2	2	3	○	●	●	○	○
	1	1	1	2	4	○	●	○	●	○
	1	2	0	2	5	○	●	○	○	●
	2	0	1	3	4	○	○	●	●	○
	2	1	0	3	5	○	○	●	○	●
	3	0	0	4	5	○	○	○	●	●

4 Encore Fibonacci

Ecrire un algorithme de génération aléatoire pour l'ensemble de séquences de Fibonacci F_n, sachant que (a) $\frac{f_{n+1}}{f_n} \simeq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5 Code de Gray pour les combinaisons

Soit $C_{n,m} \subset \{0,1\}^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m. Un Code de Gray pour $C_{n,m}$ est défini par :

$$\mathcal{C}_{n,m} = \begin{cases} 00\ldots0 & \text{si} \quad m = 0 \\ 11\ldots1 & \text{si} \quad n = m \\ 0\mathcal{C}_{n-1,m} \cup 1\overline{\mathcal{C}}_{n-1,m-1} & \text{si} \quad 1 < m < n. \end{cases} \tag{1}$$

Écrire un algorithme pour générer ce code de Gray.