I43 TD 6

1

Trouver une forme close et la série génératrice pour les suites :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 2a_{n-1} + 1 & \text{si} \quad n \geq 1. \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 1 \\ -3b_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases} \quad c_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 3c_{n-1} + 3 & \text{si} \quad n > 0. \end{cases}$$

$$d_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 3d_{n-1} + 4^n & \text{si} \quad n > 0. \end{cases}$$

2

Donnez la fonction génératrice de la suite $a_n = n^2$.

3

Combien de mots de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$

1. ne contiennent pas le facteur 00 ?
2. contiennent au moins un 0 et au moins un 1 ?
3. contiennent un nombre pair de 1 et impair de 2 ?

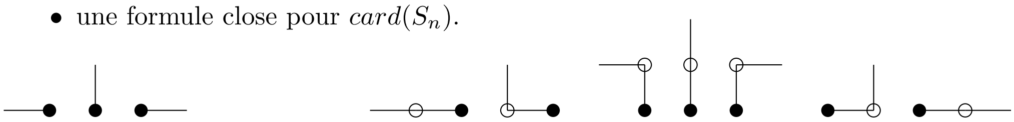
4

Combien de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ ont le même nombre de a et de b ?
Prouver que $\sum_{k \geq 0} C_n^{2k} \cdot C_{2k}^k \cdot 2^{n-2k} = C_{2n}^n$.

5 Chemins

Soit S_n l'ensemble de chemins auto-évitants de longueur n qui consistent en trois types de pas: (1,0), (-1,0), (0,1). Trouver :

- un *codage* (représentation linéaire) pour S_n,
- une relation de récurrence pour $card(S_n)$,
- une formule close pour $card(S_n)$.



S_1 S_2

6

Soit s_n le nombre de façons de choisir un ensemble de personnes parmi n – disons qu'il s'agit d'un comité–, en désignant un représentant à l'interieur de ce comité.

Exemple : Si l'ensemble de personnes est $S = \{Jean, Luc\}$ alors il y a 4 comités possibles :

- $\{\underline{Jean}\}$
- $\{\underline{Luc}\}$
- $\{\underline{Jean},\ Luc\}$
- $\{Jean,\ \underline{Luc}\}$

(les noms soulignés désignent le représentant du comité), et donc $s_2 = 4$.

1. Calculer s_3
2. Calculer s_n
3. Prouver que $\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.