I43 TD 4–5

1 Soit $\{a, b, c, d\}$ un alphabet à quatre lettres. Trouver :

1. le nombre de mots de longueur n écrits sur cet alphabet;
2. le nombre de mots de longueur n dans lesquels chacune des lettres a, b, c, d apparaît au moins une fois.

2 J'ai trois paires de chaussettes à accrocher les unes à côté des autres sur une corde à linge. Les deux chaussettes de chaque paire sont identiques, mais les paires sont toutes de couleurs différentes.

1. Combien peut-on faire de combinaisons de chaussettes;
2. Même question s'il est interdit de placer deux chaussettes de même paire l'une à côté de l'autre.

3 Trouver le nombre d'entiers entre 1 et 10 000 qui ne sont pas divisibles par 4, 5 ou 6.

4 Soit E un ensemble avec $card(E) = n$, $A, B \subset E$, $A \cap B = \emptyset$ $card(A) = n_1$ $card(B) = n_2$.
Calculer le nombre N de parties à p éléments, avec $p \geq 2$

- ayant exactement un élément dans A et un élément dans B
- ayant au moins un élément dans A et un élément dans B

5 Soit 2 billes rouges, 3 vertes, et 4 jaunes. Il s'agit de ranger les billes sur une ligne. 1) De combien de façons différentes un daltonien qui confond le rouge et le vert range les billes ? 2) De combien de façons différentes un daltonien qui confond le jaune et le vert range les billes ? 3) De combien de façons differentes une personne « normale » range les billes ?

6 Soit $\mathcal{F}(n, x)$ l'ensemble des fonctions

$$f : \{1, 2, \ldots n\} \to \{1, 2, \ldots x\}$$

Une fonction $f \in \mathcal{F}(n, x)$ est :

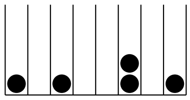
- *injective* : si $a \neq b \in \{1, 2, \ldots n\}$ alors $f(a) \neq f(b)$;
- *surjective* : si $\forall z \in \{1, 2, \ldots x\}$ alors $\exists a \in \{1, 2, \ldots n\}$ tel que $f(a) = z$;
- *bijective* : si f est simultanement injective et surjective.

Trouver une représentation linéaire et compter

1. $\mathcal{F}(n, x)$;
2. $\{f \in \mathcal{F}(n, x),\ f\ bijective\}$;
3. $\{f \in \mathcal{F}(n, x),\ f\ injective\}$;
4. $\{f \in \mathcal{F}(n, x),\ f\ surjective\}$.

7 Une *composition* d'un entier n en k parties est une suite d'entiers non-négatifs de longueur k, $p_1 p_2 \ldots p_k$, tel que $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$. Par exemple 1 0 1 0 0 2 0 1 est une composition de 5 en 8 parties parce que $1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 + 0 + 1 = 5$.
Alternativement, une composition de n en k parties peut-être vue comme le rangement de n billes *non-étiquetées*[1] en k boîtes étiquetées[2] . Ci-dessous, la composition 1 0 1 0 0 2 0 1 de 5 en 8 parties dans la représentation « *n billes en k boîtes* ». Par la suite $Comp(n, k)$ est l'ensemble des compositions de n en k parties.

[1] indifférentiables
[2] différentiables



1. Trouver une bijection entre $Comp(n,k)$ et un ensemble d'objets combinatoires connu (voir le tableau);
2. Déduire $card(Comp(n,k))$;
3. Trouver une définition récursive pour $Comp(n,k)$;
4. Exprimer cette définition en un algorithme de génération exhaustive pour $Comp(n,k)$.

Table 1: Les composition de 3 en 3 parties et les combinaisons de 2 parmi 5.

$Comp(3,3)$		$C(5,2)$	
	0 0 3	1 2	● ● ○ ○ ○
	0 1 2	1 3	● ○ ● ○ ○
	0 2 1	1 4	● ○ ○ ● ○
	0 3 0	1 5	● ○ ○ ○ ●
	1 0 2	2 3	○ ● ● ○ ○
	1 1 1	2 4	○ ● ○ ● ○
	1 2 0	2 5	○ ● ○ ○ ●
	2 0 1	3 4	○ ○ ● ● ○
	2 1 0	3 5	○ ○ ● ○ ●
	3 0 0	4 5	○ ○ ○ ● ●

8 Soit $Cp(n)$ l'ensemble des compositions de l'entier n à l'aide des chiffres 1 et 2 (le nombre de parties est variable). Par exemple $Cp(3) = \{1\,1\,1,\ 1\,2,\ 2\,1\}$ parce que $1+1+1 = 1+2 = 2+1 = 3$. Alternativement, une composition de $Cp(n)$ peut-être vue comme le rangement de n billes dans des boîtes contenant **une** ou **deux** billes. Ci-dessous, les compositions $Cp(3)$ et $Cp(4)$ dans cette représentation.

$Cp(3)$		$Cp(4)$	
	'billes en boîtes'		'billes en boîtes'
1 1 1		1 1 1 1	
1 2		1 1 2	
2 1		1 2 1	
		2 1 1	
		2 2	

Trouver :

1. $Cp(1)$, $Cp(2)$ et $Cp(5)$;
2. $card\,(Cp(n))$;
3. Une bijection entre $Cp(n)$ et une classe d'objets combinatoires connue;
4. Une définition récursive pour $Cp(n)$.