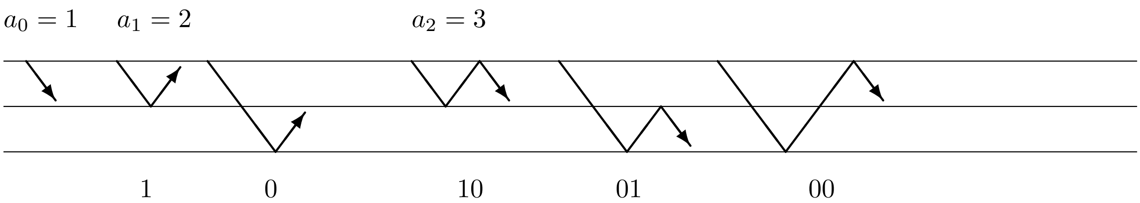
I43 TD 1–3

1

Supposons que nous mettions deux plaques de verre face contre face. De combien de façons possibles a_n un rayon de lumière peut-il traverser les deux plaques ou être réfléchi aprés avoir changé de direction n fois ?



2

Soit A_n l'ensemble de tous les pavages possibles d'un rectangle de taille $1 \times n$ avec trois types de dominos : blanc de taille 1×1 : □; noir de taille 1×1 : ▤; et blanc de taille 1×2 : ▭.
Exemple: $A_1 = \{$□, ▤$\}$, $A_2 = \{$□□, □▤, ▤□, ▤▤, ▭$\}$.
Trouver:

1. A_3,
2. une définition récursive pour A_n,
3. une définition récursive pour $a_n = card(A_n)$,
4. la valeur de a_0,
5. une forme close pour a_n,
6. la série génératrice pour a_n.

3

Soit A_n l'ensemble de tous les pavages possibles d'un rectangle de taille $1 \times n$ avec trois types de dominos : blanc de taille 1×1 : □; blanc de taille 1×2 : ▭; et noir de taille 1×2 : ▬.
Exemple: $A_1 = \{$□$\}$, $A_2 = \{$□□, ▭, ▬$\}$.
Trouver:

1. A_3,
2. une définition récursive pour A_n,
3. une définition récursive pour $a_n = card(A_n)$,
4. la valeur de a_0,
5. une forme close pour a_n,
6. la série génératrice pour a_n.

4

Une caissière doit rendre la monnaie, 19 centimes d'euro. Elle dispose de 20 pièces (identiques) d'un centime, et de 2 pièces (identiques) de 5 centimes.

1. De combien de manières elle peut rendre la monnaie ?
2. Même question si elle dispose d'un nombre illimité de pièce d'un centime et de 5 centimes.
3. Même question si elle dispose en plus d'un nombre illimité de pièces de 10 centimes ?

5

Trouver une forme close et la série generatrice pour :

(1) $f_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$ (2) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 5a_{n-1} - 6a_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$

(3) $c_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ c_{n-1} - c_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$ (4) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ -a_{n-1} + 6a_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$

(5) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = 2 \\ 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} & \text{si} \quad n > 2. \end{cases}$ (6) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ -2 & \text{si} \quad n = 1 \\ 6a_{n-1} - 8a_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$

(7) $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 1 \\ -1 & \text{si} \quad n = 2 \\ 2b_{n-1} - b_{n-2} + 2b_{n-3} & \text{si} \quad n > 2. \end{cases}$

6

Trouver les fonctions génératrices suivantes :

	suite	fonction génératrice	fonction génératrice
1	$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} nz^n$	$\frac{z}{(1-z)^2}$
2	$1, 2, 3, 4, \ldots, (n+1) \ldots$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
3	$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$	$\frac{1}{1-2z}$
4	$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} c^n z^n$	$\frac{1}{1-cz}$
5	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} z^n$	$\ln \frac{1}{1-z}$
6	$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, C_n^2, \ldots$	$\sum_{n\geq 2} C_n^2 z^n$	$\frac{z^2}{(1-z)^3}$

7

La population de grenouilles d'un lac quadruple chaque année. Le premier jour de chaque année 100 grenouilles sont déplacées dans un autre lac et initialement il y avaient 100 grenouilles. Soit a_n le nombre de grenouilles apres n années; trouver a_n.

8

Une personne dépose sur un compte à 5% d'intérêt par an la somme de 1000 euros. A partir de la deuxième année la personne dépose chaque année 500 euros de plus sur le compte. Soit e_n la somme disponible sur le compte à la fin de la n-ième année; trouver e_n.

9

Soit p_n le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ avec un avec un nombre pair de a.

- Montrez que $p_n = p_{n-1} + 3^{n-1}$ pour $n \geq 1$,
- Donnez la forme close de p_n.

10

Dans une ville, la compagnie de location des vélos attribue à chaque vélo un numéro d'immatriculation constitué d'une suite (éventuellement vide) de lettres parmi a, b, c, suivie par une suite (éventuellement vide) de chiffres parmi 0 et 1. Combien de numéros d'immatriculation de longueur n il y en a ?