Combinatore I

Vincent Vajnovszki

Principe d'inclusion-exclusion

Dans une soirée trois boissons sont servies : bière, coca et orangeade. La distribution des invités, en fonction de leur consomation est donnée par :

Principe d'inclusion-exclusion

Dans une soirée trois boissons sont servies : bière, coca et orangeade. La distribution des invités, en fonction de leur consomation est donnée par :

- Buveurs de bière (et éventuellement autre boisson) : 10
- Buveurs de coca (et éventuellement autre boisson) :12
- Buveurs de soda (et éventuellement autre boisson) : 7
- Buveurs de bière et coca (et éventuellement de orangeade) : 4
- Buveurs de bière et orangeade (et éventuellement de coca) : 3
- Buveurs de coca et orangeade (et éventuellement de bière) : 2
- Buveurs de bière, coca et orangeade : 1.

Dans une soirée trois boissons sont servies : bière, coca et orangeade. La distribution des invités, en fonction de leur consomation est donnée par :

- Buveurs de bière (et éventuellement autre boisson) : 10
- Buveurs de coca (et éventuellement autre boisson) :12
- Buveurs de soda (et éventuellement autre boisson) : 7
- Buveurs de bière et coca (et éventuellement de orangeade) : 4
- Buveurs de bière et orangeade (et éventuellement de coca) : 3
- Buveurs de coca et orangeade (et éventuellement de bière) : 2
- Buveurs de bière, coca et orangeade : 1.

Trouver le nombre de personnes ayant participées à la soirée ?

$A_1, A_2 \subset E$
$card(A_1 \cup A_2) = card(A_1) + card(A_2)$

$A_1, A_2 \subset E$
$card(A_1 \cup A_2) = card(A_1) + card(A_2) - card(A_1 \cap A_2)$

$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset E$

$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset E$

$card(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset E$$
$$card(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$$
$$card(A_1) + card(A_2) + \ldots + card(A_m)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset E$
$card(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$

$card(A_1) + card(A_2) + \ldots + card(A_m)$
$- \sum_{i<j} card(A_i \cap A_j)$

$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset E$
$card(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$

$card(A_1) + card(A_2) + \ldots + card(A_m)$
$-\sum_{i<j} card(A_i \cap A_j)$
$+\sum_{i<j<k} card(A_i \cap A_j \cap A_k)$

$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset E$
$card(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$

$card(A_1) + card(A_2) + \ldots + card(A_m)$
$- \sum_{i<j} card(A_i \cap A_j)$
$+ \sum_{i<j<k} card(A_i \cap A_j \cap A_k)$
$\ldots$
$(-1)^{p-1} \sum_{i_1<i_2\ldots<i_p} card(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p})$

$A_1, A_2, \ldots, A_m \subset E$
$card(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$

$card(A_1) + card(A_2) + \ldots + card(A_m)$
$- \sum_{i<j} card(A_i \cap A_j)$
$+ \sum_{i<j<k} card(A_i \cap A_j \cap A_k)$
$\ldots$
$(-1)^{p-1} \sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_p} card(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p})$
$\ldots$
$(-1)^{m-1} card(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$

Exemple

$card(E) = n$, $A, B \subset E$, $A \cap B = \emptyset$
$card(A) = n_1$ $card(B) = n_2$.

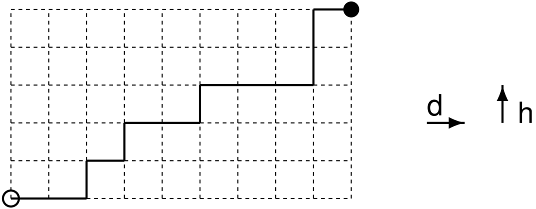
Calculer le nombre N de parties de E à p éléments, avec $p \geq 2$

- ayant exactement un élément dans A et un élément dans B
- ayant au moins un élément dans A et un élément dans B

$Ch(n, m)$ l'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times m$, où deux pas sont autorisés: h, d.

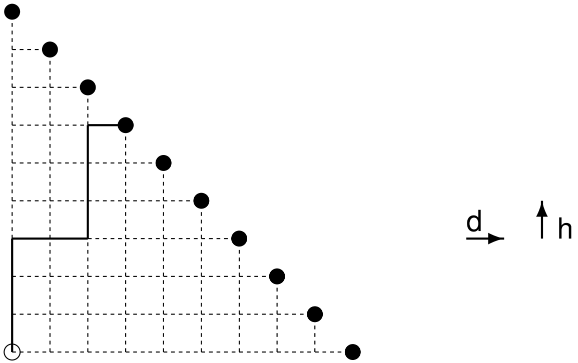
Objets combinatoires 1

$Ch(n, m)$ l'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times m$, où deux pas sont autorisés: h, d.



$Tr(n)$ l'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau triangulaire $n \times n$, où deux pas sont autorisés: h, d.

$Tr(n)$ l'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau triangulaire $n \times n$, où deux pas sont autorisés: h, d.



Définition algébrique

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un alphabet avec n lettres et X^n l'ensemble des suites sur X de longueur n.

Définition algébrique

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un alphabet avec n lettres et X^n l'ensemble des suites sur X de longueur n.
Exemple $X = \{0, 1\}$ et $B_n = X^n = \{0, 1\}^n$, est l'ensemble de toutes les suites binaires de longueur n.

Définition algébrique

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un alphabet avec n lettres et X^n l'ensemble des suites sur X de longueur n.
Exemple $X = \{0, 1\}$ et $B_n = X^n = \{0, 1\}^n$, est l'ensemble de toutes les suites binaires de longueur n.

- $B_3 = \{000, 0001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$;

Définition algébrique

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un alphabet avec n lettres et X^n l'ensemble des suites sur X de longueur n.
Exemple $X = \{0, 1\}$ et $B_n = X^n = \{0, 1\}^n$, est l'ensemble de toutes les suites binaires de longueur n.

- $B_3 = \{000, 0001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$;
- $card(B_n) = 2^n$;

Définition algébrique

Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un alphabet avec n lettres et X^n l'ensemble des suites sur X de longueur n.
Exemple $X = \{0, 1\}$ et $B_n = X^n = \{0, 1\}^n$, est l'ensemble de toutes les suites binaires de longueur n.

- $B_3 = \{000, 0001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$;
- $card(B_n) = 2^n$;
- les ensembles $Tr(n)$ et B_n sont en bijection.

Exemple $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $C_{n,m} \subset X^m$ l'ensemble des combinaisons de m parmi n:

$$C_{n,m} = \{c_1 c_2 \ldots c_m \mid c_i < c_j \text{ si } i < j\}$$

Exemple $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ et $C_{n,m} \subset X^m$ l'ensemble des combinaisons de m parmi n:

$$C_{n,m} = \{c_1 c_2 \dots c_m \mid c_i < c_j \text{ si } i < j\}$$

- $C_{5,3} = \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\}$;

Exemple $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $C_{n,m} \subset X^m$ l'ensemble des combinaisons de m parmi n:

$$C_{n,m} = \{c_1 c_2 \ldots c_m \mid c_i < c_j \text{ si } i < j\}$$

- $C_{5,3} = \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\}$;
- $card(C_{n,m}) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, les coefficients binomiaux;

Exemple $X = \{0, 1\}$ et $C'_{n,m} \subset X^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m:

$$C'_{n,m} = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid \text{il existe exactement } m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

Exemple $X = \{0, 1\}$ et $C'_{n,m} \subset X^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m:

$$C'_{n,m} = \{b_1 b_2 \ldots b_n \mid \text{il existe exactement}$$
$$m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

- $C'_{5,3} = \{11100, 110100, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111\}$;

Exemple $X = \{0,1\}$ et $C'_{n,m} \subset X^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m:

$$C'_{n,m} = \{b_1 b_2 \ldots b_n \mid \text{il existe exactement} \\ m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

- $C'_{5,3} = \{11100, 110100, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111\}$;
- $C_{n,m}$ et $C'_{n,m}$ sont en bijection ;

Exemple $X = \{0,1\}$ et $C'_{n,m} \subset X^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m:

$$C'_{n,m} = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid \text{il existe exactement}$$
$$m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

- $C'_{5,3} = \{11100, 110100, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111\}$;
- $C_{n,m}$ et $C'_{n,m}$ sont en bijection ;
- La fonction $\phi : C_{n,m} \to C'_{n,m}$, où $\phi(c_1 c_2 \dots c_m) = b_1 b_2 \dots b_n$ est définie par:
  $$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \exists j \text{ tel que } c_j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple $X = \{0,1\}$ et $C'_{n,m} \subset X^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m:

$$C'_{n,m} = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid \text{il existe exactement } m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

- $C'_{5,3} = \{11100, 110100, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111\}$;
- $C_{n,m}$ et $C'_{n,m}$ sont en bijection ;
- La fonction $\phi : C_{n,m} \to C'_{n,m}$, où $\phi(c_1 c_2 \dots c_m) = b_1 b_2 \dots b_n$ est définie par:
  $$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \exists j \text{ tel que } c_j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- $card(C'_{n,m}) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, les coefficients binomiaux

Exemple $X = \{0,1\}$ et $C'_{n,m} \subset X^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m:

$$C'_{n,m} = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid \text{il existe exactement}$$
$$m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

- $C'_{5,3} = \{11100, 110100, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111\}$;
- $C_{n,m}$ et $C'_{n,m}$ sont en bijection ;
- La fonction $\phi : C_{n,m} \to C'_{n,m}$, où $\phi(c_1 c_2 \dots c_m) = b_1 b_2 \dots b_n$ est définie par:
  $$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \exists j \text{ tel que } c_j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- $card(C'_{n,m}) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, les coefficients binomiaux
- les ensembles $Ch(n,m)$ et $C'_{n+m,m}$ sont en bijection.

Exemple $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $P_n \subset X^n$ l'ensemble des permutations de longueur n:

$$P_n = \{a_1 a_2 \ldots a_n \mid a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}$$

- $P_3 = \{123, 132, 231, 213, 321, 312\}$;

Exemple $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $P_n \subset X^n$ l'ensemble des permutations de longueur n:

$$P_n = \{a_1 a_2 \ldots a_n \mid a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}$$

- $P_3 = \{123, 132, 231, 213, 321, 312\}$;
- $card(P_n) = n!$

Problématique

1. Codage (représentation linéaire)
2. énumeration (nombre d'ojets dans une classe)
3. bijection
4. génération exhaustive
5. génération aléatoire
6. codes de Gray

Objets Combinatoires 2

Objets Combinatoires 2

- Permutations
  - Arrangements
  - Permutations pour un multi-ensemble
- mots
- sous-ensemble à k éléments (Problème du choix)
- Compositions

Permutations

Supposons que nous avons n personnes qui arrivent dans un cabinet dentaire au même moment. Le dentiste ne peut que les prendre un par un, alors il doit décider l'ordre dans lequel il doit les faire passer. Combien y a-t-il d'ordres possibles?

Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble contenant n objets. Combien existe-t-il de mots différents de la forme :

$$x_1, x_2 \ldots x_n, \; x_i \neq x_j, x_i \in A$$

Définition

Les arrangements de différents objets en ordre linéaire utilisant chaque objet exactement une fois est appelé une *permutation* de ces objets.

Définition

Les arrangements de différents objets en ordre linéaire utilisant chaque objet exactement une fois est appelé une *permutation* de ces objets.

Le nombre

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

de toutes les permutations de n objects est appelé *n factoriel*, et est noté $n!$.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exemple Combien de manières différentes peut on construire des drapeaux avec les 3 couleurs rouge, blanc et vert?

Arrangements

Arrangements

Définition

Le choix de k objets différents, ordonnés, parmis n objets en utilisant chaque objet au plus une fois est appelé *arrangement* de ces objets.

Arrangements

Définition

Le choix de k objets différents, ordonnés, parmis n objets en utilisant chaque objet au plus une fois est appelé *arrangement* de ces objets.

Théorème

Théorème *Le nombre d'arrangement de k élements parmi n est*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

Arrangements

Définition

Le choix de k objets différents, ordonnés, parmis n objets en utilisant chaque objet au plus une fois est appelé *arrangement* de ces objets.

Théorème

Théorème *Le nombre d'arrangement de* k *élements parmi* n *est*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

Exemple Un président doit choisir cinq politiciens parmi 20 candidats pour occuper cinq différents cabinets ministériels. Combien de choix possibles a-t-il ?

Permutations pour un multi-ensemble

Permutations pour un multi-ensemble

'Definition' Un multi-ensemble est un ensemble sauf que la répétition des éléments est permise.

Permutations pour un multi-ensemble

'Definition' Un multi-ensemble est un ensemble sauf que la répétition des éléments est permise.

Définition

L'arrangement de différents objets en ordre linéaire utilisant exactement n_i fois l'objet i (avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) est appelé *permutation* d'un multi-ensemble.

Permutations pour un multi-ensemble

'Definition' Un multi-ensemble est un ensemble sauf que la répétition des éléments est permise.

Définition

L'arrangement de différents objets en ordre linéaire utilisant exactement n_i fois l'objet i (avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) est appelé *permutation* d'un multi-ensemble.

Notons que si $n_i = 1$ pour tout i alors on a une permutation ordinaire sans éléments répétés.

Permutations pour un multi-ensemble

'Definition' Un multi-ensemble est un ensemble sauf que la répétition des éléments est permise.

Définition

L'arrangement de différents objets en ordre linéaire utilisant exactement n_i fois l'objet i (avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) est appelé *permutation* d'un multi-ensemble.

Notons que si $n_i = 1$ pour tout i alors on a une permutation ordinaire sans éléments répétés.

Théorème

Avec les notations ci-dessus, le nombre de permutations d'un multi-ensemble (ou le nombre de façons de ranger linéairement ces objets) est

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

Exemple Un jardinier a 5 fleurs rouges, 3 jaunes et 2 blanches pour planter en une rangée. Combien y a-t-il de motifs possibles ?

Maintenant nous étudions les problèmes dans lesquels nous n'arrangerons pas simplement les objets, en connaissant combien de fois on peut utiliser chaque symbole, mais plutot en construisant des mots à partir d'un ensemble fini de symboles, ce que nous appelons un *alphabet* fini.

Mots

Maintenant nous étudions les problèmes dans lesquels nous n'arrangerons pas simplement les objets, en connaissant combien de fois on peut utiliser chaque symbole, mais plutot en construisant des mots à partir d'un ensemble fini de symboles, ce que nous appelons un *alphabet* fini.
Nous n'avons pas besoin que les symboles apparaissent un nombre spécifié de fois.

Mots

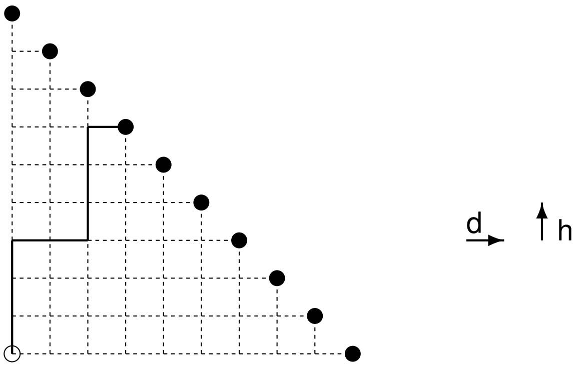
Maintenant nous étudions les problèmes dans lesquels nous n'arrangerons pas simplement les objets, en connaissant combien de fois on peut utiliser chaque symbole, mais plutot en construisant des mots à partir d'un ensemble fini de symboles, ce que nous appelons un *alphabet* fini.
Nous n'avons pas besoin que les symboles apparaissent un nombre spécifié de fois.

Théorème

Théorème *Le nombre de mots de longueur k sur l'alphabet à n éléments est n^k.*

L'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times n$, où deux pas sont autorisés: h, d.

L'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times n$, où deux pas sont autorisés: h, d.



Exemple Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Exemple Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est 2^n.
Preuve On construit une bijection de l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble à n éléments vers les mots de longueur n sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. Comme ce dernier ensemble a 2^n éléments, on obtient le résultat.

Exemple Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est 2^n.

Preuve On construit une bijection de l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble à n éléments vers les mots de longueur n sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. Comme ce dernier ensemble a 2^n éléments, on obtient le résultat.

La bijection est construite de la façon suivante:

Soit B un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et soit $f(B)$ le mot ayant

- un 1 en i-ième position si $i \in B$
- un 0 sinon

Exemple Une ville a construit récemment 10 rond points. Certains d'entre eux auront un éclairage, et d'autres auront un éclairage avec une station essence. Combien y-a-t il de possibilités?

Exemple Une ville a construit récemment 10 rond points. Certains d'entre eux auront un éclairage, et d'autres auront un éclairage avec une station essence. Combien y-a-t il de possibilités?
Solution Il est facile de construire une bijection de l'ensemble de toutes distributions de lumière et de station essences sur les mots de longueur 10 sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$.
Pour chaque distribution de ces objets, on définit le mot sur $\{0, 1, 2\}$ comme suit :

- si l'intersection i a une station essence et un éclairage, alors on met le chiffre 2 sur la $i$ème lettre du mot
- si seulement il y a un éclairage on met 1 sur la $i$ème lettre du mot,
- dans les autres cas on met 0

Sous-ensemble (problème du choix)

Exemple A la lotterie nationale de Hongrie, cinq nombres sont sélectionnés aléatoirement dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 90\}$. Pour gagner le gros lot, on doit deviner tous les 5 nombres correctement. Combien de tickets a-t-on besoin de jouer pour être sur d'avoir le gros lot.

Cette question est un exemple du dernier et plus important et interessant problème d’énumération élémentaire, le problème du choix. Dans ce genre de problème, nous avons à choisir des *sous-ensembles* dans un ensemble donné.

Cette question est un exemple du dernier et plus important et interessant problème d'énumération élémentaire, le problème du choix. Dans ce genre de problème, nous avons à choisir des *sous-ensembles* dans un ensemble donné.Nous supposerons toujours que les sous-ensembles ont une taille donnée. La différence importante avec les problèmes précédents est que l'ordre des éléments du sous-ensemble n'a aucune importance.

Cette question est un exemple du dernier et plus important et interessant problème d'énumération élémentaire, le problème du choix. Dans ce genre de problème, nous avons à choisir des *sous-ensembles* dans un ensemble donné.Nous supposerons toujours que les sous-ensembles ont une taille donnée. La différence importante avec les problèmes précédents est que l'ordre des éléments du sous-ensemble n'a aucune importance. Par exemple $\{1, 43, 52, 8, 3\}$ et $\{3, 8, 52, 1, 43\}$ sont deux sous-ensembles identique de $\{1, 2, \ldots, 90\}$.

Le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ a une importance cruciale en combinatoire.

Le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ a une importance cruciale en combinatoire.

Définition

Le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté C_n^k et appelé *coefficient binomial*

Le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ a une importance cruciale en combinatoire.

Définition

Le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est noté C_n^k et appelé *coefficient binomial*

Théorème

Théorème *Pour tout entier k positif ou nul $k \leq n$, on a*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Proposition

Pour tout entier k positif ou nul $k \leq n$, on a

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

Proposition

Pour tout entier k positif ou nul $k \leq n$, on a

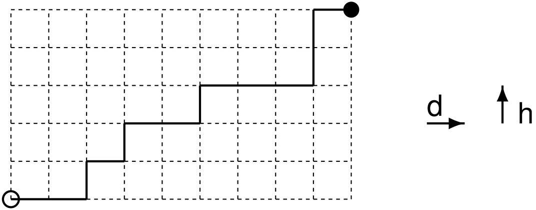
$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

Exemple Un étudiant en médecine doit travailler dans un hopital 5 jours en janvier. Il ne doit pas travailler 2 jours consécutifs. De combien de manières peut il choisir les 5 jours?

L'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times m$, où deux pas sont autorisés: h, d.

L'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times m$, où deux pas sont autorisés: h, d.



Multi-ensembles

Exemple Maintenant on suppose que nous jouons a la lotterie ou 5 nombres sont tirés parmis $\{1, 2, \ldots, 90\}$, mais les nombres tirés sont remis en jeu après être sélectionnés. Pour gagner le jackpot, on doit jouer le même multi-ensemble de nombres que le tirage (l'ordre ici n'a pas d'importance). Combien de ticket dois je acheter pour etre sur d'avoir le jackpot?

Exemple Maintenant on suppose que nous jouons a la lotterie ou 5 nombres sont tirés parmis $\{1, 2, \ldots, 90\}$, mais les nombres tirés sont remis en jeu après être sélectionnés. Pour gagner le jackpot, on doit jouer le même multi-ensemble de nombres que le tirage (l'ordre ici n'a pas d'importance). Combien de ticket dois je acheter pour etre sur d'avoir le jackpot?

Théorème

Théorème *le nombre de multi-ensembles à k éléments parmis* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *est*

$$C^k_{n+k-1}$$

Résumé

Permuts	n objets distincts	$n!$
	k objets distincts parmis n objets	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
	n_i objets de type i $\sum_{i=1}^k n_i = n$	$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_k!}$
mots (words)	mots de longueur k sur un alphabet à n lettres	n^k
Sous-ens.	sous-ens. à k éléments de $\{1,\ldots n\}$	C_n^k
	Multi-ens. de k éléments avec des éléments dans $\{1,\ldots n\}$	C_{n+k-1}^k

Compositions

Supposons que nous avons à distribuer 20 balles identiques pour quatre enfants: Alice, Bob, Charlie and Denise. Comme les balles sont identiques, cela revient à savoir combien de balles devrais je donner à chaque enfant.

Autres objets combinatoires

Compositions

Supposons que nous avons à distribuer 20 balles identiques pour quatre enfants: Alice, Bob, Charlie and Denise. Comme les balles sont identiques, cela revient à savoir combien de balles devrais je donner à chaque enfant. Alors si nous voulons savoir le nombre de façons de distribuer ces balles, nous avons simplement à savoir le nombre de facons d'écrire 20 comme une somme de 4 entiers positifs ou nuls.

Compositions

Supposons que nous avons à distribuer 20 balles identiques pour quatre enfants: Alice, Bob, Charlie and Denise. Comme les balles sont identiques, cela revient à savoir combien de balles devrais je donner à chaque enfant. Alors si nous voulons savoir le nombre de façons de distribuer ces balles, nous avons simplement à savoir le nombre de facons d'écrire 20 comme une somme de 4 entiers positifs ou nuls. Clairement, l'ordre des entiers importe, c'est à dire, $1 + 6 + 8 + 5$ ne correspond pas à la même distribution que $6 + 1 + 5 + 8$.

Définition

Un tableau $a_1 a_2 \ldots a_k$ avec

- $a_i \geq 0$
- $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$

est appelé une composition de n en k parties. Si nous avons aussi $a_i > 0$ pour tout i, alors le tableau $a_1 a_2 \ldots a_k$ est appelé *composition faible* de n.

Théorème

Le nombre de compositions de n en k parties est

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$$

Théorème

Le nombre de compositions faible de n en k parties est

$$C_{n-1}^{k-1}$$

Proposition

Le nombre de toutes les compositions faibles de n est 2^{n-1}

Proposition

Le nombre de toutes les compositions faibles de n est 2^{n-1}

Preuve. Une composition faible de n aura au moins une et au plus n parties. Alors le nombre total compositions faibles de n est

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = 2^{n-1}$$

Partitions d'un ensemble

Partitions d'un ensemble

Maintenant supposons que les *balles* sont différentes, mais les boites ne le sont pas. Alors on doit étiqueter les balles de 1 à n. En d'autres termes, on doit simplement dire que nous voulons *partitionner* l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k sous-ensembles non vide.

Maintenant supposons que les *balles* sont différentes, mais les boites ne le sont pas. Alors on doit étiqueter les balles de 1 à n. En d'autres termes, on doit simplement dire que nous voulons *partitionner* l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k sous-ensembles non vide.

Définition

Le nombre de partitions de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k parties non vide est noté $S(n, k)$, et il est appelé le *nombre de Stirling de seconde espèce*.

Exemple L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ a 7 partitions en deux parties non vide:

- $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$
- $\{1, 2, 4, \}$, $\{3\}$
- $\{1, 3, 4\}$, $\{2\}$
- $\{2, 3, 4, \}$, $\{1\}$
- $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$
- $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$
- $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$

Exemple

- Pour tout $n \geq 1$, on a $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.
- Pour tout $n \geq 2$, on a $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ puisqu une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $n-1$ parties doit etre faite de 1 doublon et de $n-2$ singletons.

Exemple

- Pour tout $n \geq 1$, on a $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.
- Pour tout $n \geq 2$, on a $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ puisqu une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $n-1$ parties doit etre faite de 1 doublon et de $n-2$ singletons.

Théorème

Pour rout entier positif $k \leq n$, on a

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

Proposition

Le nombre de toutes les fonctions surjectives

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

est $k! \cdot S(n, k)$

Proposition

Le nombre de toutes les fonctions surjectives

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

est $k! \cdot S(n, k)$

Une autre façon de trouver notre énumeration de partitions est en énumerant *toutes* les partitions, sans restreindre le nombre de parties.

Définition

Le nombre de *toutes* les partitions d'ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en parties non vide est noté $B(n)$, et est appelé le $n$ème nombre de Bell.

Alors $B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n, i)$, le nombre de Bell satisfait aussi une jolie relation de récurrence.

Alors $B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n,i)$, le nombre de Bell satisfait aussi une jolie relation de récurrence.

Théorème

Pour tout entier positif n on a

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot B(i)$$

Partition d'un entier

Maintenant nous supposons que les balles et les boites sont indistinguables, alors quand on distribue les balles dans les boites, la seule chose qui importe est leurs nombres.

Partition d'un entier

Maintenant nous supposons que les balles et les boites sont indistinguables, alors quand on distribue les balles dans les boites, la seule chose qui importe est leurs nombres.
En d'autres termes, on est interessé de trouver le nombre de facons d'écrire un entier positif n comme une somme d'entiers positifs, ou l'ordre de sommation n'a pas d'importance. C'est à dire, $4 = 3 + 1$ ou $4 = 1 + 3$ seront comptés pour une seule sommation pour l'entier 4.

Partition d'un entier

Maintenant nous supposons que les balles et les boites sont indistinguables, alors quand on distribue les balles dans les boites, la seule chose qui importe est leurs nombres.
En d'autres termes, on est interessé de trouver le nombre de facons d'écrire un entier positif n comme une somme d'entiers positifs, ou l'ordre de sommation n'a pas d'importance. C'est à dire, $4 = 3 + 1$ ou $4 = 1 + 3$ seront comptés pour une seule sommation pour l'entier 4.
Comme l'ordre de sommation ne compte pas, on ne perd pas de generalité si on suppose que la sommation est en ordre décroissant (faible).

Définition

Soit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$ des entiers tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Le tableau $a_1 a_2 \ldots a_k$ est appelé une *partition* de l'entier n. Le nombre de toutes les partitions de n est noté $p(n)$. Le nombre de partitions de n en exactement k parties est noté $p_k(n)$.

Définition

Soit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$ des entiers tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Le tableau $a_1 a_2 \ldots a_k$ est appelé une *partition* de l'entier n. Le nombre de toutes les partitions de n est noté $p(n)$. Le nombre de partitions de n en exactement k parties est noté $p_k(n)$.

Exemple L'entier 5 a 7 partitions. En effet, il y a

- 5
- $4 + 1$
- $3 + 2$
- $3 + 1 + 1$
- $2 + 2 + 1$
- $2 + 1 + 1 + 1$
- $1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Donc, $p(5) = 7$.

Révision

objets distincts boites distinctes	objets identiques boites distinctes
objets distincts boites identiques	objects identiques boites identiques

Révision

objets distincts boites distinctes	objets identiques boites distinctes
objets distincts boites identiques	objects identiques boites identiques

- - nombre fixé de boites
  - nombre quelconque de boites

Révision

objets distincts boites distinctes	objets identiques boites distinctes
objets distincts boites identiques	objects identiques boites identiques

- - nombre fixé de boites
  - nombre quelconque de boites
- - pas de boite vide
  - boite vide autorisé

Surjection	n objets distincts k boites distinctes	$S(n,k) \cdot k!$
	n objets distincts nombre quelconque de boites distinctes	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) \cdot i!$

Surjection	n objets distincts k boites distinctes	$S(n,k) \cdot k!$
	n objets distincts nombre quelconque de boites distinctes	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) \cdot i!$
Compositions faibles	n objets identiques k boites distinctes	C_{n-1}^{k-1}
	n objets identiques nombre quelconque de boites distinctes	2^{n-1}

Surjection	n objets distincts k boites distinctes	$S(n,k) \cdot k!$
	n objets distincts nombre quelconque de boites distinctes	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) \cdot i!$
Compositions faibles	n objets identiques k boites distinctes	C_{n-1}^{k-1}
	n objets identiques nombre quelconque de boites distinctes	2^{n-1}
partitions d'ensemble.	n objets distincts k boites identiques	$S(n,k)$
	n objets identiques number quelconque de boites identiques	$B(n)$

Surjection	n objets distincts k boites distinctes	$S(n,k) \cdot k!$
	n objets distincts nombre quelconque de boites distinctes	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) \cdot i!$
Compositions faibles	n objets identiques k boites distinctes	C_{n-1}^{k-1}
	n objets identiques nombre quelconque de boites distinctes	2^{n-1}
partitions d'ensemble.	n objets distincts k boites identiques	$S(n,k)$
	n objets identiques number quelconque de boites identiques	$B(n)$
partition d'entier	n objets identiques k boites identiques	$p_k(n)$
	n objets identiques nombre quelconque de boites identiques	$p(n)$

Surjection	n objets distincts k boites distinctes	$S(n,k)\cdot k!$
	n objets distincts nombre quelconque de boites distinctes	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i)\cdot i!$
Compositions faibles	n objets identiques k boites distinctes	C_{n-1}^{k-1}
	n objets identiques nombre quelconque de boites distinctes	2^{n-1}
partitions d'ensemble.	n objets distincts k boites identiques	$S(n,k)$
	n objets identiques number quelconque de boites identiques	$B(n)$
partition d'entier	n objets identiques k boites identiques	$p_k(n)$
	n objets identiques nombre quelconque de boites identiques	$p(n)$