Suites et séries Génératrices

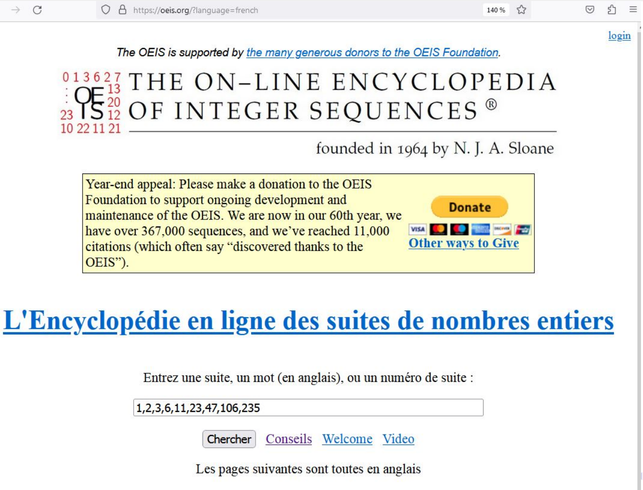
Jean-Luc Baril et Vincent Vajnovszki

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Suite

Une suite $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots = (u_n)_{n \geq 0}$ *est une fonction*

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } u_i = u(i)$$



Suites récurrentes

La suite u_n est définie à partir des termes précédents :

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_2, u_1, u_0)$$

Il est donc nécessaire de fixer les premiers termes pour que la suite soit bien définie (comme la récursivité en informatique !)

Exemple

Exemple 1 : La population de grenouilles d'un lac quadruple chaque année. Le premier jour de chaque année 100 grenouilles sont déplacées dans un autre lac et initialement il y avaient 100 grenouilles.

Soit u_n le nombre de grenouilles apres n années.
Par exemple,

- $u_0 = 100$,
- $u_1 = 4 \cdot 100 - 100 = 300$,
- $u_2 = 4 \cdot 300 - 100 = 1100$...

Question : Trouver u_{36}.
Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ avec } a = 4 \text{ et } b = -100$$

Exemple

Exemple 2 : Une personne dépose sur un compte à 5% d'intérêt par an la somme de 1000 euros. A partir de la deuxième année la personne dépose chaque année 500 euros de plus sur le compte. Soit u_n la somme disponible sur le compte à la fin de la n-ième année.
Question : Trouver u_{36}.

$$u_{n+1} = (1 + \frac{5}{100})u_n + 500 \text{ avec } u_0 = 1000$$

$$u_{36} = 53709,97$$

Suites récurrentes

Exemple 3 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 2u_{n-1} + 1 & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

u_n correspond au nombre d'opérations nécessaire pour résoudre le jeu des tours de Hanoï avec n disques

Question : $u_n = ?$

Les premières valeurs sont : $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$
Réponse : $u_n = 2^n - 1$

Suites récurrentes

Exemple 4 - suite de Fibonacci ; Soit la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

Question : $f_n = ?$
Les premières valeurs sont : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Suites récurrentes d'ordre 1

$$u_n = au_{n-1} + b$$

Théorème

- $a = 0$ *Suite constante* $u_n = b$
- $a = 1$, $b = 0$, *Suite constante*
- $a = 1$, $b \neq 0$, *Suite arithmétique* $u_n = u_0 + nb$
- $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b = 0$, *Suite géométrique* $u_n = u_0 a^n$
- *sinon, Suite arithmético-géométrique* $u_n = a^n(u_0 - r) + r$ *avec* $r = \frac{b}{1-a}$

Suites récurrentes linéaire homogène

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$

$$u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2} + \ldots + a_k \cdot u_{n-k}$$

est une suite *récurrente linéaire homogène*.
Récurrente : s'exprime avec les termes précédents
Linéaire : les termes précédents n'ont pas d'exposants
Homogène : les coefficients sont constants (ne dépendent pas de n)

Exemple :
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ si $n > 1$ et $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Suites récurrentes linéaire homogène d'ordre 2

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2}$$

Théorème

Equation caractéristique : $r^2 = a_1 r + a_2$

- Si 2 solutions réelles distintes r_1 et r_2 alors

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n \;\; avec \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$

- Si 1 solution double r, alors

$$u_n = (\lambda_1 n + \lambda_2) r^n \;\; avec \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$

- Si 2 solutions complexes r_1 et r_2 alors

$$u_n = r^n(\lambda_1 cos(\theta n) + \lambda_2 sin(\theta n)) \;\; avec \;\; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$$

où r est le module de r_1 et θ l'argument de r_1

Suites récurrentes linéaire homogène d'ordre $n \geq 2$

$$u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2} + \ldots + a_k \cdot u_{n-k}$$

Théorème

Si l'équation caractéristique

$$r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \ldots + a_k$$

a les solutions distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_k$ *alors*

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \ldots + \lambda_k r_k^n$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$

Exemple

La suite de Fiboncci est définie par :

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ si } n > 1$$

et $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.
L' équation caractéristique est :

$$r^2 = r + 1,$$

ou

$$r^2 - r - 1 = 0$$

avec les solutions

$$r_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \text{ et } r_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

donc

$$f_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

et les conditions initiales $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ donnent deux équations :

$$f_0 = 0 = \lambda_1 + \lambda_2$$

et

$$f_1 = 1 = \lambda_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \lambda_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$\lambda_1 = 1/\sqrt{5}$ et $\lambda_2 = -1/\sqrt{5}$
donc

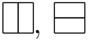
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

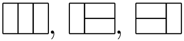
Les dominos

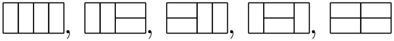
Soit T_n l'ensemble de tous les pavages possibles d'un rectangle de taille $2 \times n$ avec des dominos de taille 2×1.

Exemple

$T_1 =$ 

$T_2 =$ 

$T_3 =$ 

$T_4 =$ 

et en général,

$$T_n = \begin{cases} \lambda & \text{si} \quad n = 0 \\ \square & \text{si} \quad n = 1 \\ \square\, T_{n-1} \cup \boxminus\, T_{n-2} & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

Question : $t_n = card(T_n) = ?$
Réponses :

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ t_{n-1} + t_{n-2} & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

et $t_n = f_{n+1}$.

Soit $(u_n)_{n\geq 0} = u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots$ une suite. La série

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$$

est appelée série génératrice de cette suite.
Le coefficient u_n est également noté

$$u_n = [z^n]A(z)$$

Exemple

La série génératrice de la suite constante égale à 1 est :

$$F(z) = 1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 1 \cdot z^3 + 1 \cdot z^4 + 1 \cdot z^5 \cdots =$$

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 \cdots$$

Remarque

Une belle remarque :

$$F(z) = \frac{1}{1 - z} \quad \rightarrow \quad \textit{Fonction génératrice}$$

Exemple

La série génératrice de la suite de Fibonacci est :

$$F(z) = 0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^1 + 1 \cdot z^2 + 2 \cdot z^3 + 3 \cdot z^4 + 5 \cdot z^5 \cdots =$$

$$F(z) = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 \cdots$$

Trouver la fonction génératirce asoociée ?

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Exemple

Trouver la fonction génératrice des suites

- $u_n = 1,\ n \geq 0.$
- $v_n = 2^n,\ n \geq 0.$
- $w_n = 2^n + 3$
- $w'_n = 2^{n+3} + 2^n + 3$

Manœuvres de base

Les fonctions génératrices permettent de résoudre des relations de récurrences. Etant donnée une suite u_n qui satisfait une certaine récurrence nous cherchons une forme close pour u_n en fonction de n ; il faut procéder en quatre étapes :

1. Ecrire une relation qui exprime u_n en fonction d'autres éléments de la suite,
2. Multiplier les deux membres de l'équation par z^n et sommer sur tout n. Ceci donne, dans le membre gauche la somme $\sum_n u_n z^n$, donc la fonction génératrice $F(z)$. Le membre de droite doit être réorganisé de façon à devenir une expression en fonction de $F(z)$,
3. Résoudre la nouvelle équation pour obtenir une forme close de $F(z)$, on suppose que $u_n = 0$ pour $n < 0$,
4. Développer $F(z)$ en série et prendre le coefficient de z^n. C'est la forme close de u_n que nous cherchons.

Développement en série

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$$

Exercices

Exemple
Trouver la série génératrice et la forme close de la suite :

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 2s_{n-1} + 1 & \text{si} \quad n > 0 \end{cases}$$

Trouver la fonction génératrice et la forme close (Fibonacci) :

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ s_{n-1} + s_{n-2} & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

1. **Décalage vers la droite**
   $zA(z) = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n$
   $0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots$
2. **Décalage vers la gauche**
   $\frac{A(z)-a_0}{z} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$
   $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n+1}, \ldots$
3. **Multiplication d'indice (différentiation)**
   $A'(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1} z^n$
   $a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots$

Opérations sur les séries génératrices

4 **division d'indice (intégration)**
$\int_0^z A(t)dt = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$
$0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4}, \frac{a_4}{5}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}$

5 **mise à l'echelle**
$A(\lambda z) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n a_n z^n$
$a_0, \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \ldots, \lambda^n a_n, \ldots$

6 **addition**
$A(z) + B(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n) z^n$
$a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots$

7 **différence**
$(1-z)A(z) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n-1})z^n$
$a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots$

8 **convolution**
$A(z)B(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}\right) z^n$
$a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, \ldots, \sum_{0\leq k\leq n} a_k b_{n-k}, \ldots$

9 **somme partielle**
$\frac{A(z)}{1-z} = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq n} a_k\right) z^n$
$a_1, a_1 + a_2, \ldots, \sum_{0\leq k\leq n} a_k, \ldots$

Exemple

	suite	s. gén.	s. gén.
1	$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} nz^n$	$\frac{z}{(1-z)^2}$
2	$1, 2, 3, 4, \ldots, (n+1)\ldots$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
3	$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$	$\frac{1}{(1-2z)}$
4	$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} c^n z^n$	$\frac{1}{(1-cz)}$
5	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} z^n$	$\ln \frac{1}{1-z}$
6	$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, C_n^2, \ldots$	$\sum_{n\geq 2} C_n^2 z^n$	$\frac{z^2}{(1-z)^3}$

Suites récurrentes linéaire homogènes

Théorème

Si u_n vérifie la récurrence linéaire homogène

$$u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2} + \ldots a_k \cdot u_{n-k}$$

alors la fonction génératrice de u_n est

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n = \frac{f(z)}{g(z)}$$

avec
• $g(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_k z^k$ *et*
• *le polynôme numérateur est détérminé par les conditions initiales $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ avec $degre(f) < degre(g)$.*

Exemple

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3}$$

avec $u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1.$

$$A(z) = \frac{z - z^2}{1 - 2z - z^2 + 2z^3} = \frac{z}{1 - z - 2z^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1+z}\right).$$

Et donc, $u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

Bilan

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut être représentée par :

- une relation de récurrence (linéaire homogène)
  ex. : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 2$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$
- la forme close
  ex. :
  $$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
- la fonction génératrice
  ex. :
  $$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

Théorème de la somme

- Soit u_n le nombre de manières (possibilités) de construire une structure sur un ensemble à n éléments, et $A(z)$ la fonction génératrice de u_n.
- Soit v_n le nombre des manières de construire une autre structure sur un ensemble à n éléments, et $B(z)$ la fonction génératrice de v_n.
- Soit c_n le nombre des manières de construire une structure de taille n du type 1 ou de type 2 sachant qu'un élément ne peut pas être commun aux deux types, alors la fonction génératrice $C(z)$ de c_n est

$$C(z) = A(z) + B(z)$$

et

$$c_n = u_n + v_n$$

Théorème du produit

- Soit u_n le nombre de manières (possibilités) de construire une structure sur un ensemble à n éléments, et $A(z)$ la fonction génératrice de u_n.
- Soit v_n le nombre des manières de construire une autre structure sur un ensemble à n éléments, et $B(z)$ la fonction génératrice de v_n.
- Soit c_n le nombre des manières de diviser l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en deux intervalles (éventuellement vides) $\{1, 2, \ldots, i\}$ et $\{i + 1, i + 2, \ldots, n\}$, et de construire une structure du premier type sur le premier intervalle, une structure sur du deuxième type sur le deuxième intervalle, alors la fonction génératrice de c_n est

$$C(z) = A(z) \cdot B(z)$$

et

$$c_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots u_n v_0$$

Exemple

Le deuxième semestre à l'UFR Sciences et Techniques consiste en n jours. Le doyen a décidé de diviser le semestre en deux parties et de designer pour chaque partie des jours de travail personnel et de jours de cours (CM, TD, TP). De combien de manières le doyen peut-il faire cela ?

Exemple

Solutions

$u_n = v_n = 2^n$ avec la fonction génératrice $A(z) = B(z) = \frac{1}{1-2z}$.

Donc, $C(z) = A(z) \cdot A(z) = \frac{1}{(1-2z)^2}$
de plus $C(z) = \frac{1}{2}A'(z)$, et donc $w_n = (n+1) \cdot 2^n$

Produit quelconque d'une structure

- Soit u_n le nombre des manières (possibilités) de construire une structure sur un ensemble à n éléments, et $A(z)$ la fonction génératrice de u_n.
- Soit h_n le nombre des manières de diviser l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans un nombre arbitraire d'intervalles et de construire une structure du premier type sur chaque intervalle ($h_0 = 1$).

On a

$$H(z) = 1 + A(z) + A(z)^2 + A(z)^3 \cdots = \frac{1}{1 - A(z)}.$$

Exemple

Les n soldats d'une unité militaire sont placés en ligne. L'officier en charge partage les soldats en sous-unités, en formant ainsi des sous-intervalles non vides. Il devra choisir pour chaque sous-unités un responsable. De combien de manières l'officier peut-il faire cela ?

Solutions

Soit u_k le nombre de possibilités pour choisir une personnes parmis k et donc $u_k = k$, et

$$A(z) = \sum_{k \geq 1} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

On a donc

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1-A(z)} = \frac{1}{1-\frac{x}{(1-x)^2}} = 1 + \frac{x}{1-3x+x^2} \\ &= 1 + x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right) \\ &= 1 + x\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right) \end{aligned}$$

avec $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ and $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
et finalement

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

Composition de deux structures

- Soit u_n le nombre des manières (possibilités) de construire une structure sur un ensemble à n éléments, et $A(z)$ la fonction génératrice de u_n (on suppose que $u_0 = 0$).
- Soit v_n le nombre des manières de construire une autre structure sur un ensemble à n éléments, et $B(z)$ la fonction génératrice de v_n (on suppose que $v_0 = 0$).
- Soit c_n le nombre des manières de diviser l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans un nombre arbitraire d'intervalles, de construire une structure du premier type sur chaque intervalle et une structure du deuxième type sur l'ensemble d'intervalles. Soit $C(z)$ la fonction génératrice de c_n.

$$C(z) = B(A(z))$$

Exemple

Les n soldats d'une unité militaire sont placés en ligne. L'officier en charge partage les soldats en sous-unités, en formant ainsi des sous-intervalles non vides. Il devra ensuite choisir un nombre de sous-unités pour les tâches de nuit. De combien de manières l'officier peut-il faire cela ?

Exemple

Solution
$u_n = 1$ pour $n \geq 1$ (il y a une seule structure triviale) et donc

$$A(z) = \frac{z}{1-z}.$$

$v_n = 2^n$ parce que il y a 2^n manières de choisir un sous-ensemble d'un ensemble à n éléments.
Donc,

$$B(z) = \frac{1}{1-2z}.$$

Exemple

Donc,

$$\begin{aligned} C(z) &= B(A(z)) \\ &= \frac{1}{1-\frac{2z}{1-z}} \\ &= \frac{1-z}{1-3z} \\ &= \frac{1}{1-3z} - \frac{z}{1-3z} \end{aligned}$$

et finalement $c_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ pour $n \geq 1$